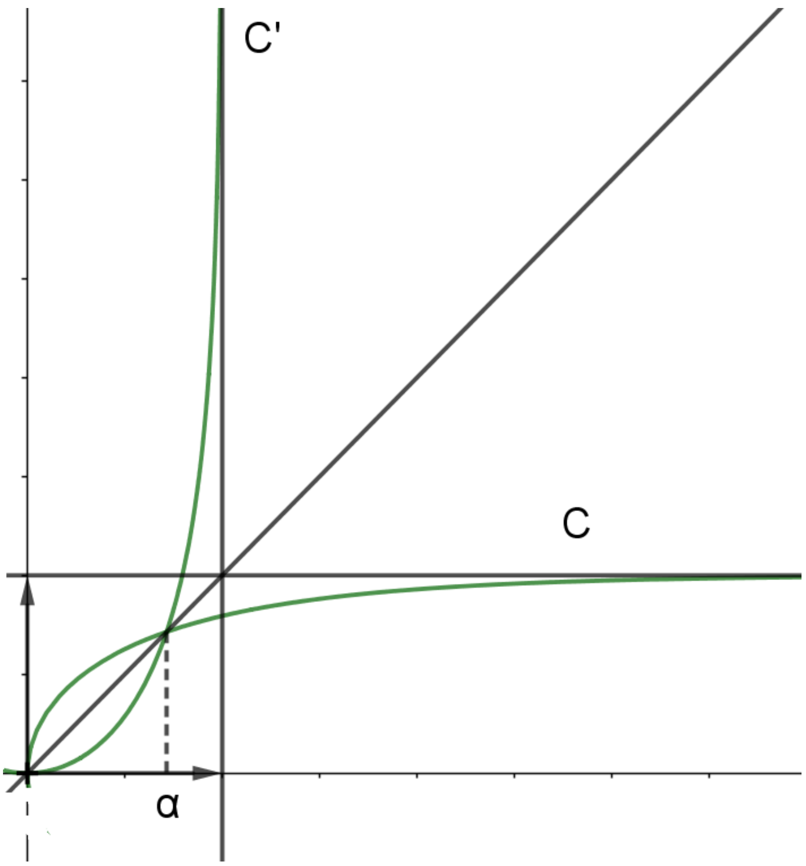
Enoncé

Partie A : Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par f(x) = $\sqrt{1-e^{-x}}$. On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

On admet les résultats suivants:

- f est continue et strictement croissante sur $[0;+\infty[$
- f admet une fonction réciproque g définie sur [0;1[par g(x) = - Ln(1-x²).
- L'équation f(x) = g(x) admet une seule solution α comprise entre 0,7 et 0,8.

On donne si dessous les courbes (C) et (C') représentant respectivement des fonctions f et g.



Soit E l'ensemble des points M(x,y) tel que y = f(x) et 0 ≤ x ≤ α.

Calculer le volume V du solide de révolution engendré par rotation de l'arc E autour de l'axe des abscisses.

Partie B : Soit la fonction F_n définie sur [0,1[par $F_0(x) = \int_0^{g(x)} dt$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$;

$F_n(x) = \int_0^{g(x)} [f(t)]^n \, dt$ et la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = F_n(\alpha)$.

1. a/ Calculer u_0.

   b/ Montrer que pour tout entier naturel n on a : $0 \leq u_n \leq \alpha^{n+1}$.

   c/ Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

2. Montrer que la fonction F_n est dérivable sur [0,1[et que pour tout x∈[0,1[on a ; $F_n'(x) = \frac{2x^{n+1}}{1-x^2}$.

3. a/ Montrer que pour tout x de [0,1[et pour tout entier naturel n on a $F_{n+2}(x) - F_n(x) = \frac{-2x^{n+2}}{n+2}$

   b/ Déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $u_{n+2} = -2\left(\frac{\alpha^{n+2}}{n+2}\right) + u_n$.

   c/ En déduire que pour tout n de IN* on a $u_{2n} = u_0 - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha^{2k}}{2k}$ et que $u_{2n+1} = u_1 - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha^{2k+1}}{2k+1}$

4. Pour tout n de IN* on pose $v_n = \sum_{k=2}^{2n+1} \frac{\alpha^k}{k}$ Montrer que (v_n) converge vers un réel que l'on précisera.