

GRAPHE PROBABILISTE

Exercice :

Une usine de produits alimentaires propose à ses ouvriers de se répartir en deux équipes de travail soit le jour, soit la nuit. Chaque ouvrier choisit une seule équipe de travail.

Chaque année tous les ouvriers renouvellent leurs choix. L'usine compte 800 ouvriers et elle n'accueille pas de nouveaux.

Pour le renouvellement des choix, les données des années précédentes permettent d'envisager le modèle suivant :

- 70% des ouvriers de l'équipe de nuit renouvellent à la même équipe.
- 20% des ouvriers de l'équipe de jour passent à l'équipe de nuit.

En 2017, 200 ouvriers travaillent la nuit et 600 ouvriers travaillent le jour.

On appelle $P_n = (a_n \ b_n)$ la matrice traduisant la répartition des ouvriers selon l'équipe de travail choisie l'année 2017+n :

- a_n représente la probabilité qu'un ouvrier fait partie de l'équipe de nuit l'année 2017+n
- b_n représente la probabilité qu'un ouvrier fait partie de l'équipe de jour l'année 2017+n
- $a_n + b_n = 1$

1. Représenter cette situation par un graphe probabiliste.

2. Déterminer l'état initial $P_0 = (a_0 \ b_0)$.

3. a. Déterminer la matrice **M** de transition associée au graphe.

b. On admet qu'en 2019 on a 36,25% des ouvriers font partie de l'équipe de nuit et 63,75% des ouvriers font partie de l'équipe de jour.

Déterminer la répartition que le modèle envisagé permet de prévoir pour 2020 (exprimer les résultats sous forme de pourcentages, puis donner les nombres d'ouvriers correspondants).

4. Soit $P = (x \ y)$ la matrice correspondant à l'état stable.

a. Déterminer les nombres x et y .

b. En déduire la limite de a_n quand n tend vers l'infini. Interpréter ce résultat.