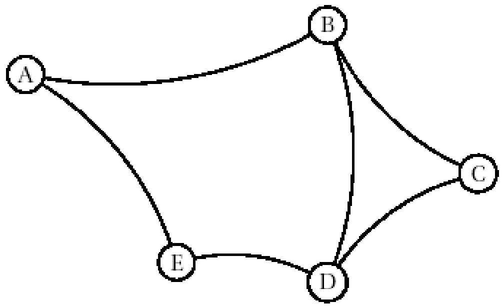
Exercice 1

Graphe G

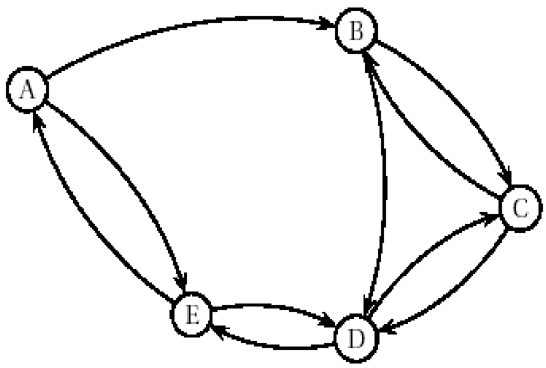


La cité des sciences d'une ville est composée de cinq pavillons qui sont des bâtiments reliés entre eux par des allées.
On modélise les bâtiments par les sommets A, B, C, D et E et les allés par les arêtes du graphe G ci- contre.

1) a) On désire peindre les bâtiments de façon que deux bâtiments reliés par une allée soient toujours de couleurs différentes.
   Déterminer, en le justifiant, un encadrement du nombre minimal de couleurs nécessaires puis déterminer ce nombre.

   b) Est-il possible de parcourir toutes les allées de la cité sans passer deux fois par la même allée ?

Graphe G'



2) Une exposition est organisée à cette cité des sciences. La fréquentation devenant trop importante, on décide d'instaurer un plan de circulation :
   certaines allées deviennent à sens unique, d'autres restent à double sens. Le graphe G' ci-contre, modélise cette nouvelle situation.

   a) Donner la matrice M associée au graphe G'.

   b) Le graphe G' est-il eulérien ? admet-il une chaîne eulérienne ? (justifier la réponse).

3) On donne la matrice M^5 , et on suppose que chaque arête orientée représente un chemin de 200 mètres.
   On souhaite effectuer un parcours de longueur $1\ km$ partant du point B et arrivant au point D.

$$M^5 = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 9 & 6 & 10 \\ 4 & 5 & 7 & 11 & 5 \\ 4 & 6 & 6 & 11 & 5 \\ 1 & 5 & 10 & 6 & 10 \\ 6 & 5 & 5 & 14 & 2 \end{pmatrix}$$

   a) Combien peut-on effectuer de parcours différents ?

   b) Montrer qu'il existe un seul cycle orienté de longueur 5 passant par le sommet A. Quel est ce cycle ?
   En est-il de même pour le sommet B ?